Дробово-раціональні вирази, рівняння. Метод інтервалів. Узагальнений метод інтервалів.

Крецу Д. М., вчитель математики,
вчитель-методист Глибоцького ліцею

Зінкевич В. І., вчитель математики
Волоківської ЗОШ І-ІІІ ст.

Крецу Домніка Миколаївна

Вчитель математики Глибоцького ліцею

Стаж роботи – 35 років

Категорія: вища

Звання: вчитель-методист

Нагороди: значок «Відмінник освіти України», премія імені О. Поповича

Керівник авторської педагогічної майстерні вчителів Глибоцького ліцею

Зінкевич
Василь Іванович

Вчитель математики

Волоківської ЗОШ І-ІІІ ст.

Стаж роботи – 7 років

Категорія: спеціаліст ІІ категорії

План проведення

1. Цілі раціональні вирази.

2. Дробово-раціональні вирази.

3. Дробово-раціональні рівняння.

4. Дробово-раціональні нерівності.

5. Метод інтервалів.

Цілі раціональні вирази

- Не містять змінної у знаменнику дробу.

- Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена.

$$\frac{2}{3}x^4 - 3y^{3+1};\ x^2 + 2xy + y^2;\ 0{,}7x^3 - a^3$$

- Значення змінних можуть набувати довільних числових значень.

- **ОДЗ:** будь-яке число

Дробово-раціональні вирази – алгебраїчні дроби

- Містять змінну у знаменнику дробу.
- Дробовий вираз неможливо подати у вигляді многочлена.

$$\frac{5}{x};\ \frac{a+b}{c};\ \frac{x^2-1}{y};\ \frac{m-1}{n+4};\ \frac{x^3-y^3}{x+y};\ \frac{1}{a^2-9};\ \frac{7-t^2}{t+7}+\frac{1}{t}$$

ОДЗ: будь-яке число, окрім тих, які перетворюють знаменник в 0 тобто,

$$x \neq 0,\ c \neq 0,\ y \neq 0,\ n \neq -4,\ x \neq -y,\ a \neq \pm 3,\ t \neq -7,\ t \neq 0.$$

оскільки ділити на 0 не можна.

Зауважте!

1. Вирази: 2^{x}; 3^{a}; $(-4)^{2k}$ – не є раціональними;

2. $\left(2a-3\right):\left(7b\right)=\dfrac{2a-3}{7b}$ – дію ділення замінюємо рискою дробу.

***Приклад* 1.** Знайдіть область допустимих значень виразів:

1) $\dfrac{4}{x-y}$, 2) $\dfrac{15t-4}{t+5}$, 3) $\dfrac{4+z}{z(z-2)}$, 4) $\dfrac{5}{a}+\dfrac{a}{a^2-4}$.

Розв'язання.

1) $x-y\neq 0,\ x\neq y.$

***Відповідь*.** ОДЗ: $x\in R,\ y\in R,\ x\neq y.$

2) $t+5\neq 0,\ \ t\neq -5.$

Відповідь. ОДЗ: $t\neq -5.$

3) $z(z-2)\neq 0,\ z\neq 0,\ z\neq 2.$

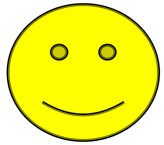
***Відповідь*.** ОДЗ: $z\in R,\ z\neq 0,\ z\neq 2$

4) $\left[\begin{array}{l} a\neq 0; \\ a^2-4\neq 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a\neq 0; \\ (a-2)\,(a+2)\neq 0\,; \end{array}\right.$ $a\neq 0,\ a\neq 2,\ a\neq -2.$

Відповідь. ОДЗ: $a\in R,\ a\neq -2,\ a\neq 0,\ a\neq 2.$

Дії над алгебраїчними *дробами*

$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$, де a, b, k – будь-які значення крім $b = 0$, $k = 0$	$\frac{ak}{bk}=\frac{a}{b}$, де $k \neq 0, b \neq 0$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, $b \neq 0$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$, $d \neq 0, b \neq 0$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, $b \neq 0, d \neq 0$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, де $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$



Зауважте!

Щоб скоротити алгебраїчний дріб, треба:

1) розкласти на множники чисельник і знаменник;

2) Знак «–» у дробі можна переносити

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

3) $(a - b)^2 = (b - a)^2$;

4) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;

***Приклад* 2.** Скоротіть дріб $\dfrac{m^2-16}{mx+4x}$.

Розв'язання.

$$\frac{m^2-16}{mx+4x}=\frac{(m-4)\cdot(m+4)}{x\cdot(m+4)}=\frac{m-4}{x}$$

Відповідь. $\dfrac{m-4}{x}$ при $x \neq 0$ і $m \neq -4$.

***Приклад* 3.** Виконайте дії: $\dfrac{12-y}{6y-36}+\dfrac{6}{6y-y^2}$.

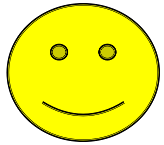
Розв'язання.

$$\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}=\frac{12-y}{6(y-6)}+\frac{6}{y(6-y)}=$$

$$=\frac{12-y}{6(y-6)}-\frac{6}{y(y-6)}=\frac{(12-y)\cdot y-6\cdot 6}{6y(y-6)}=\frac{12y-y^2-36}{6y(y-6)}=$$

$$=\frac{-(y^2-12y+36)}{6y(y-6)}=\frac{(y-6)^2}{6y(6-y)}=\frac{(6-y)^2}{6y(6-y)}=\frac{6-y}{6y}.$$

Відповідь. $\dfrac{6-y}{6y}$.



Зауважте!

1. Усі перетворення раціональних дробів виконують на їх ОДЗ.

2. ОДЗ знаходять і записують у відповідь тільки тоді, коли це вимагає умова завдання.

Приклад **4.** Розв'язати рівняння: $\dfrac{12-y}{6y-36}+\dfrac{6}{6y-y^2}=0.$

Розв'язання.

$$\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}=0;$$

$$\frac{12-y}{6(y-6)}-\frac{6}{y(y-6)}=0;$$

$$\frac{(6-y)^2}{6y(6-y)}=0; \qquad (6-y)^2=0, \qquad y=6, \qquad \textbf{АЛЕ}$$

$$\left[\begin{array}{l} y\neq 0; \\ 6-y\neq 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y\neq 0; \\ y\neq 6. \end{array}\right.$$

Відповідь. Рівняння не має коренів.

***Приклад* 5.** Виконайте ділення: $\dfrac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}:\dfrac{5xy^2}{a^2-b^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{5xy^2}{a^2-b^2}=\frac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{5xy^2}=$$

$$=\frac{5xy^2\cdot(a-b)(a+b)}{(a-b)^2\cdot 5xy^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Відповідь. $\dfrac{a+b}{a-b}$ при $a\neq b$, $a\neq -b$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

***Приклад* 6.** Знайдіть значення виразу: $\frac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{5xy^2}{a^2-b^2}$,

якщо $a = 3$, $b = 2$, $x = 0{,}5$, $y = -0{,}3$.

Розв'язання.

$$\frac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{5xy^2}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Якщо $a = 3$, $b = 2$, то $\frac{a+b}{a-b}=\frac{3+2}{3-2}=5.$

Відповідь. 5.

***Приклад* 7.** Спростіть вираз $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$.

Розв'язання.

І спосіб. За умовою $a \neq b$ і $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Запишемо чисельник $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ у вигляді різниці квадратів і розкладемо її на множники.

Дістанемо:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}.$$

Відповідь. $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$, де $a \neq b$ і $a \geq 0$, $b \geq 0$.

II спосіб.

Розв'язання. Введемо заміну $u = a^{\frac{1}{4}}; v = b^{\frac{1}{4}},$

тоді

$$a^{\frac{1}{2}} = u^2; b^{\frac{1}{2}} = v^2.$$

За умовою $a \neq b$ і $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(u)^2 - (v)^2}{u - v} = \frac{(u - v)\cdot(u + v)}{u - v} = u + v = a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}.$$

Відповідь. $a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$ де $a \neq b$ і $a \geq 0$, $b \geq 0$.

***Приклад* 8.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a+b}$,

якщо $a=-3{,}73;\ b=0{,}27.$

Розв'язання.

$$\frac{2a}{a^2\text{-}b^2}-\frac{1}{a+b}=\frac{2a}{(a\text{-}b)(a+b)}-\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{2a-a+b}{(a\text{-}b)(a+b)}=\frac{a+b}{(a\text{-}b)(a+b)}=\frac{1}{a-b}.$$

Якщо $a=-3{,}73;\ b=0{,}27,$ то $\dfrac{1}{-3{,}73-0{,}27}=-\dfrac{1}{4}=-0{,}25.$

Відповідь. -0,25.

Приклад 9.

Знайти c, якщо 1) $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$; 2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$;

3) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$; 4) $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$.

Розв'язання.

Очевидно, $b \neq 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0.$

1) $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$

Тобто $\frac{1}{c}=\frac{a-b}{ab}$. Звідси, $c=\frac{ab}{a-b}$. Аналогічно решта.

Відповідь. $c=\frac{ab}{a-b}$.

Класифікація рівнянь з однією змінною

ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Методи розв’язування рівнянь різні, однак їх можна об’єднати у три:
   - ***аналітичний,***
   - ***графічний,***
   - ***використання властивостей функцій.***

2. Традиційним способом розв’язування дробових раціональних рівнянь є в першу чергу:

– зведення до спільного знаменника всіх доданків рівняння,
– використання умови рівності дробу нулю:

$$\textit{рівність}\ \frac{P(x)}{Q(x)}=0,\ \textit{коли}\ P(x)=0,\ \textit{а}\ Q(x)\neq 0$$

***Приклад* 10.** Розв'яжіть рівняння $(1{,}8-6x):9=-\frac{19}{15}$.

Розв'язання.

$$(1{,}8-6x):9=-\frac{19}{15},$$

$$\frac{1{,}8-6x}{9}=-\frac{19}{15}\ \Big|\cdot 3,$$

$$\frac{1{,}8-6x}{3}=-\frac{19}{5},$$

$$5\cdot(1{,}8-6x)=-3\cdot 19,$$

$$9-30x=-57,$$

$$57+9=30x,$$

$$30x=66,\ \Big|:30,$$

$$x=\frac{66}{30}=\frac{22}{10}=2{,}2;$$

$$x=2{,}2.$$

Відповідь. 2,2.

Зауважте!

1) Якщо $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{B}$,

то $\boldsymbol{A = C}$**, при** $\boldsymbol{B \neq 0}$**.**

2) Якщо $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{C}$,

то $\boldsymbol{B = C}$**, при** $\boldsymbol{B \neq 0}$**,** $\boldsymbol{C \neq 0}$**.**

***Приклад* 11.** Розв'яжіть рівняння: $\dfrac{4x^2-11x-3}{3-x}=0.$

Розв'язання.

$\dfrac{A}{B}=0,$ якщо $\begin{cases} A=0, \\ B\neq 0, \end{cases}$ де A, B – многочлени, тому: $\begin{cases} 4x^2-11x-3=0, \\ 3-x\neq 0; \end{cases}$

$4x^2-11x-3=0$ при $x=3$ і $x=-0{,}25$.

$$\begin{cases} 4(x-3)(x+0{,}25)=0, \\ x\neq 3; \end{cases}$$

$\begin{cases} x-3=0, \\ x\neq 3; \end{cases}$ або $\begin{cases} x+0{,}25=0, \\ x\neq 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x=3, \\ x\neq 3; \end{cases}$ або $\begin{cases} x=-0{,}25, \\ x\neq 3; \end{cases}$

Відповідь. $-0{,}25$.

***Приклад* 12.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+3}{4x+6}=\frac{2x+3}{x}$; 2) $\frac{3}{x-2}=\frac{2x+1}{1}$.

Розв'язання.

1) ОДЗ: $4x+6\neq 0,\ \ x\neq 0;$

$x\neq -1{,}5, \quad x\neq 0.$

$4x+6=x;$

$4x-x=-6\,;$

$3x=-6;$

$x=-2.$

Відповідь. – 2.

2) ОДЗ: $x-2\neq 0;\ x\neq 2.$

$(2x+1)(x-2)=3;$

$2x^2+x-4x-2=3;$

$2x^2-3x-5=0\,;$

$D=9+40=49;\ \ x_{1,2}=\frac{3\pm 7}{4};$

Звідки: $x_1=2{,}5;\ \ x_2=-1.$

Відповідь. – 1 і 2,5.

***Приклад* 13.** Розв'яжіть рівняння: $\dfrac{2y-8}{y-5}+\dfrac{10}{y^2-25}=\dfrac{y+4}{y+5}$

Розв'язання.

Ідея:* 1) *ОДЗ;* 2)** $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{B}$ ***, то A = C, при B ≠ 0.

$$\frac{10}{y^2-25}=\frac{y+4}{y+5}-\frac{2y-8}{y-5};\qquad \frac{y+4}{y+5}-\frac{2y-8}{y-5}=\frac{10}{y^2-25};$$

$$\frac{-y^2-3y+20}{y^2-25}=\frac{10}{y^2-25};$$

$$-y^2-3y+20=10;\qquad y\neq\pm5;$$

$$y^2+3y-10=0.$$

$$y_1=-5,\quad y_2=2.$$

Оскільки $y\neq\pm5$ то $y_1=-5$ – сторонній корінь.

Отже, розв'язком є число 2.

Відповідь. 2.

Приклад **14.** Розв'яжіть рівняння: $\dfrac{|x|}{x} = x.$

Розв'язання.

І спосіб.

ОДЗ: $x \neq 0.$

Оскільки при $x > 0$, $|x| = x$, то $\dfrac{x}{x} = x,$ тобто $x = 1.$

Аналогічно, якщо $x < 0$, $|x| = -x$, а значить $\dfrac{-x}{x} = x, \; x = -1.$

ІІ спосіб.

$$|x| = x^2; \;\; x^2 = x^4; \;\; x^2\left(x^2 - 1\right) = 0,$$

враховуючи ОДЗ: $x \neq 0, x = \pm 1.$

Відповідь. – 1 і 1.

***Приклад* 15.** Розв'яжіть рівняння: $\dfrac{x^2-1}{x-a}=0.$

Розв'язання.

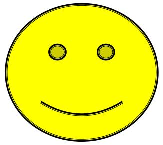
$$\begin{cases} x^2-1=0, \\ x-a\neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)\cdot(x+1)=0, \\ x\neq a, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x\neq a. \end{cases}$$

Рівняння має два розв'язки: $x=\mp 1$ при $a\neq \pm 1$ і один розв'язок: x =1 при a = – 1; x = – 1 при a =1.

Відповідь. 1) $x=1$, якщо $a=-1$;

2) $x=-1$, якщо $a=1$;

3) $x=\mp 1$, якщо $a\neq \pm 1$.



Зауважте!

Зауваження. Розв'язуючи рівняння, іноді:

1) втрачаються деякі корені:

$(x-2)^2 = x-2$ має два корені: 2 і 3. Однак, якщо скоротити на $x-2$, то отримаємо рівняння $x-2=1$, яке вже має один корінь $x=3$;

2) з'являються «*сторонні корені*»:

Так, в рівнянні $x(x+1)+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$, додавши до обох частин рівності $-\frac{1}{x}$, отримаємо рівняння $x(x+1)=0$, яке має два корені: –1 і 0. Корінь 0 є стороннім.

3) розв'язки рівняння не залежать від способу вибору розв'язування.

Раціональні нерівності і способи їх розв'язування

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – деякі задані функції. Розв'язати нерівність $f(x) > g(x)$ означає знайти всі значення змінної x, при яких ця нерівність правильна.

Для розв'язання нерівностей виду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x) < 0$, де $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$ – лінійні множники, застосовується метод інтервалів.

Правило-орієнтир методу інтервалів:

1) Знаходимо ОДЗ;
2) Знаходимо нулі лівої частини нерівності;
3) Відкладаємо на числовій прямій знайдені нулі;
4) Визначаємо знак лівої частини на кожному з інтервалів;
5) Записуємо відповідь.

Узагальнений метод інтервалів

1) *Привести раціональну нерівність до виду* $P(x) > 0$ або $P(x) < 0$, де $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{n-2})(x - a_{n-1})(x - a_n)$, де $n \in \mathrm{N}, a_n -$ деякі числа, записані у порядку зростання $(a_1), (a_2), \ldots, (a_{n-2}), (a_{n-1}), (a_n)$,

2) Знайти нулі множників і розташувати їх на осі Ox.

3) Справа поставити знак «+» і далі знак « – », якщо двочлен у непарному степені і знак «+», якщо парний степінь.

***Приклад* 16.** Розв'яжіть нерівність: $\dfrac{(2x-4)^4(3x+1)^3\left(x^2+x\right)^2}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-25\right)}>0$

Розв'язання.

ОДЗ: $x \neq \pm 5$.

Так як вираз $(2x-4)^4>0,$ для всіх $x \neq 2$,

$\left(x^2+x\right)^2>0$ для всіх $x \neq 0$ і $x \neq -1$, а тричлен $x^2+x+1>0$

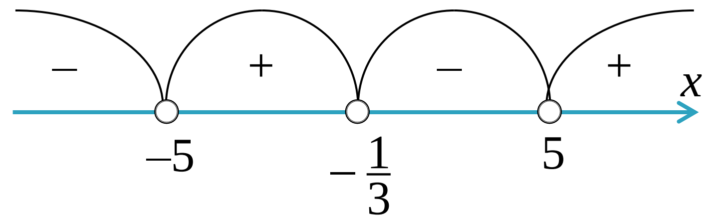
для будь-яких дійсних x, то дана нерівність рівносильна нерівності:

$$\frac{(3x+1)^3}{(x-5)(x+5)}>0,\ x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 2.$$

Вирази $(3x+1)^3$ та $(3x+1)$ мають однакові проміжки знакосталості. Тому одержана нерівність буде рівносильна нерівності:

$$\frac{(3x+1)}{(x-5)(x+5)}>0, \quad \text{якщо } x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 2.$$

Розв’яжемо отриману нерівність методом інтервалів $\dfrac{(3x+1)}{(x-5)(x+5)} > 0$



Її розв’язками будуть числа $x \in \left(-5;-\dfrac{1}{3}\right) \cup (5;+\infty)$.

Врахувавши те, що $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 2$,

отримаємо: $x \in (-5;-1) \cup \left(-1;-\dfrac{1}{3}\right) \cup (5;+\infty)$.

Відповідь. $(-5;-1) \cup \left(-1;-\dfrac{1}{3}\right) \cup (5;+\infty)$.

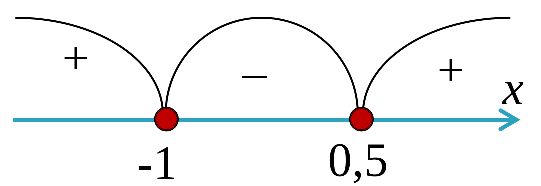
***Приклад* 17.** Розв'яжіть нерівність: $2x^2 + x - 1 \geq 0.$

Розв'язання.

Знаходимо корені многочлена $2x^2 + x - 1:$

$x_1 = -1;\ x_2 = 0{,}5.$ Наносимо ці значення на числову пряму.

Знаходимо знаки многочлена на кожному із проміжків.



Вибираємо «+», тому: $(-\infty;-1]\bigcup[0{,}5;+\infty).$

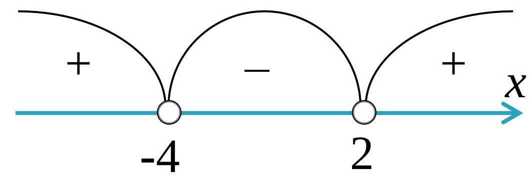
Відповідь. $(-\infty;-1]\bigcup[0{,}5;+\infty).$

***Приклад* 18.** Розв'яжіть нерівність: $(x-2)(x+4)>0.$

Розв'язання.

Знаходимо корені многочлена $(x-2)(x+4)$:

$x_1 = 2$, $x_2 = -4$.



$$x \in (-\infty;-4) \cup (2;+\infty).$$

Відповідь. $(-\infty;-4) \cup (2;+\infty).$

***Приклад* 19.** Розв'яжіть нерівність: $\dfrac{3x-2}{x-1} \le \dfrac{3x-8}{x-2}$.

Розв'язання.

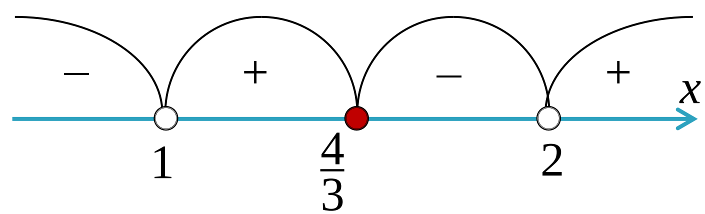
Розглянемо нерівність: $\dfrac{3x-2}{x-1} - \dfrac{3x-8}{x-2} \le 0.$

Виконаємо тотожні перетворення:

$$\frac{(3x-2)(x-2)-(x-1)(3x-8)}{(x-1)(x-2)} \le 0;$$

$$\frac{3x^2-6x-2x+4-3x^2+8x+3x-8}{(x-1)(x-2)} \le 0; \qquad \frac{3\left(x-\frac{4}{3}\right)}{(x-1)(x-2)} \le 0.$$

Розв'язуємо її методом інтервалів:



Тоді вибираємо розв'язки нерівності: $x \in (-\infty;1) \cup \left[\frac{4}{3};2\right)$.

Відповідь. $(-\infty;1) \cup \left[\frac{4}{3};2\right)$.

Приклад **20.** Розв’яжіть нерівність: $x+\frac{1}{x-3}>\frac{1}{x-3}-2.$

Розв’язання.

При $x \neq 3$ дана нерівність рівносильна нерівності $x > -2$.

Отже множиною розв’язків нерівності будуть числа

$$x \in (-2;3)\bigcup(3;+\infty).$$

Відповідь. $(-2;3)\bigcup(3;+\infty).$

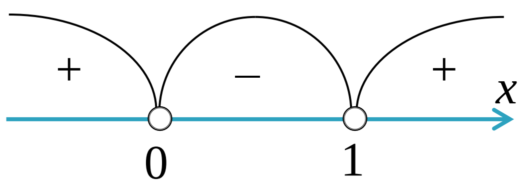
***Приклад* 21.** Розв’яжіть нерівності: 1) $\dfrac{1}{x} > 1;$ 2) $\dfrac{1}{x^2} > 1.$

Розв’язання.

ОДЗ: $x \neq 0$.

1) $\dfrac{1}{x} - 1 > 0;\ \dfrac{1-x}{x} > 0;\ \dfrac{x-1}{x} < 0;$

Знаходимо корені многочлена $(x-1)$: $x = 1$.



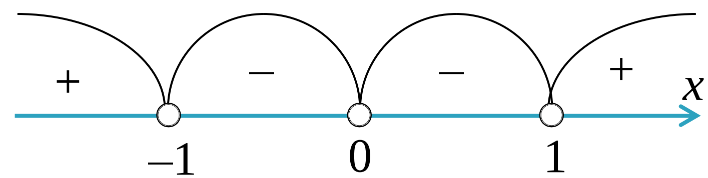
Відповідь. $(0;1)$

2) Аналогічно:

$\dfrac{1}{x^2} - 1 > 0;\ \dfrac{1-x^2}{x^2} > 0;\ \dfrac{x^2-1}{x^2} < 0;$

Знаходимо корені многочлена

$(x-1)(x+1)$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.



Множиною розв'язків будуть числа з проміжку, $x \in (-1;1)$.

Враховуючи, що $x \neq 0$, а також $x^2 > 0$.

Відповідь. $(-1;0) \cup (0;1)$.

Приклад 22. Вкажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $(x - 2)(x + 4)^2 (x^2 - 5x + 12) \geq 0$.

Розв'язання.

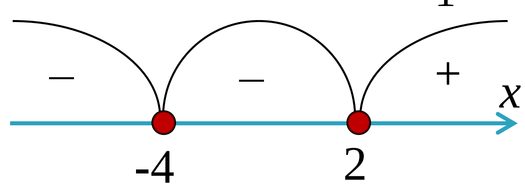
ОДЗ: x – будь-яке дійсне число.

Оскільки множник $x^2 - 5x + 12 > 0$, при будь-якому x $(D < 0)$, то дана нерівність рівносильна нерівності

$$(x - 2)(x + 4)^2 \geq 0.$$

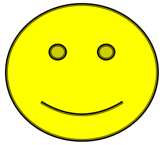
Розв'язуємо методом інтервалів: $(x - 2)(x + 4)^2 = 0$.

$x_1 = -4$, $x_2 = 2$.



$x \in \{-4\} \cup [2; +\infty)$

Відповідь. –4.



Висновки:

1. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ ***якщо P(x) = 0, а Q(x) ≠ 0.***

2. $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)<0$ **, застосовується *метод інтервалів*.**

1) Знаходимо ОДЗ

2) Знаходимо нулі лівої частини нерівності.

3) Відкладаємо на числовій прямій знайдені нулі.

4) Визначаємо знак лівої частини на кожному з інтервалів.

5) Записуємо відповідь.

Дякуємо за увагу!